De steen in de vijver

19 december 2007

Inleiding

Er is een oud, bekend probleem waarbij een steen in de vijver gegooid wordt. Het water zal daardoor stijgen.

Als dezelfde steen in een bootje in het water gelegd wordt zal het water ook stijgen. De vraag is of dat iets uit maakt.

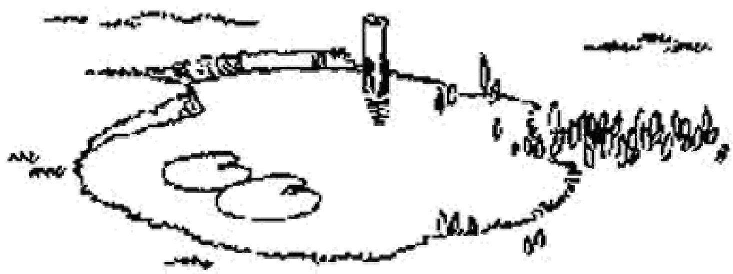
In de meeste natuurkundeboeken wordt aan de hand van een redenering uitgelegd dat in geval van de boot het water het meeste stijgt:

> Als de steen in het water ligt verplaatst deze alleen zijn eigen volume. Als de steen in de boot ligt wordt de hoeveelheid water verplaatst die dezelfde massa heeft als de steen. Omdat de dichtheid van water kleiner is dan die van steen, wordt in geval van het bootje meer water verplaatst.

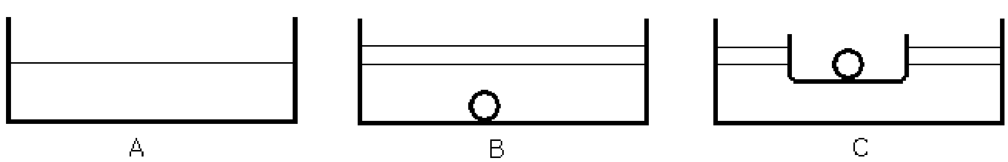
Er volgt echter nooit een berekening en de invloed van de massa en grootte van de boot wordt nooit meegewogen. Toch is het niet moeilijk om dit alles tot een sluitende uitleg te verwerken.

Een analytische uitleg

Er is een vijver. Als je een steen in de vijver gooit zal het waterpeil een beetje stijgen.
Als je een bootje in het water legt met de steen erin zal het water ook stijgen. In welk geval stijgt het water het meest?



De steen heeft een massa van *m* kg en een volume V kubieke meter. Laten we er vanuit gaan dat de vijver overal even diep is met een wateroppervlakte A.
De vijver zonder steen of boot is in afbeelding A getekend.



Als de steen in de vijver gegooid wordt komt er een extra volume V bij. Deze situatie is getekend in afbeelding B. Het extra volume wordt in de vorm van een stijging van de waterspiegel over de hele oppervlakte van de vijver uitgesmeerd.

De stijging van het water is: $h = \frac{V}{A}$

Als de steen in de boot ligt (getekend in afbeelding C) zijn er volgens Archimedes twee krachten met elkaar in evenwicht. De zwaartekracht trekt de boot en de steen omlaag:

$$F_z = (m_{steen} + m_{boot})g \qquad (1)$$

De opwaartse kracht van het water op de boot is gelijk aan de zwaartekracht van het verplaatste water.

$$F_{opwaarts} = m_{water}g = \rho_{water}V_{water}g \qquad (2)$$

Deze twee krachten zijn even groot:

$$F_{opwaarts} = F_Z$$

We vullen voor de krachten de formules (1) en (2) in. Daarna delen we links en rechts *g* weg. Tenslotte maken we het volume vrij uit de formule:

$$\rho_{water}V_{water}g = (m_{boot} + m_{steen})g$$
$$\rho_{water}V_{water} = (m_{boot} + m_{steen})$$
$$V_{water} = \frac{(m_{boot} + m_{steen})}{\rho_{water}}$$

Het verplaatste water wordt in dit geval verdeeld over de oppervlakte $A - A_{boot}$ omdat de boot een deel van de oppervlakte van de vijver inneemt. De waterstijging berekenen we met:

$$h = \frac{V_{water}}{A - A_{boot}} = \frac{(m_{boot} + m_{steen})}{\rho_{water}(A - A_{boot})} \qquad (3)$$

We willen nu weten in welk geval de stijging het grootste is: de stijging van de waterspiegel afbeelding B ($h = \frac{V}{A}$) of die in afbeelding C (formule 3):

$$\frac{V}{A} \underset{?}{<} \frac{(m_{boot} + m_{steen})}{\rho_{water}(A - A_{boot})} \qquad (4)$$

Stel nu dat de boot geen massa heeft en geen oppervlakte in neemt (dus $m_{boot} = 0$ en $A_{boot} = 0$). Vergelijking (3) wordt dan een beetje eenvoudiger.

$$\frac{V}{A} \underset{?}{<} \frac{m_{steen}}{\rho_{water} A}$$

$$V \underset{?}{<} \frac{m_{steen}}{\rho_{water}}$$

$$\frac{m_{steen}}{\rho_{steen}} \underset{?}{<} \frac{m_{steen}}{\rho_{water}}$$

Aan beide kanten van het kleiner-dan-teken staat een deling. In beide delingen is de teller hetzelfde. De deling aan de linkerkant geeft een kleinere uitkomst dan de deling rechts als de dichtheid van de steen groter is dan de dichtheid van water.
Aangezien we er vanuit gaan dat de steen zinkt is dat inderdaad zo.

De stijging van het water is dus het kleinste als we de steen in het water gooien, en het grootste als we de steen in het bootje leggen.

We zijn er vanuit gegaan dat de boot geen massa heeft en geen oppervlakte van de vijver wegneemt.
Maar wat als de boot wel iets weegt en wel oppervlakte van de vijver wegneemt? Veranderd dat de conclusie? De stijging van de waterspiegel in afbeelding C is:

$$h = \frac{(m_{boot} + m_{steen})}{\rho_{water}(A - A_{boot})}$$

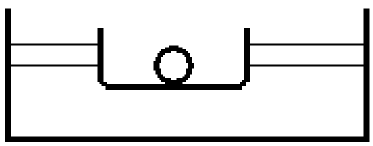
Als de massa van de boot groter dan nul is, is de stijging van het water groter.
Dat is niet zo verrassend. Een zwaardere boot verplaatst meer water en zal dus een grotere stijging van de waterspiegel tot gevolg hebben.
Als de boot meer oppervlakte van de vijver wegneemt wordt de uitkomst van de deling ook groter (je deelt door een kleiner getal en dus is de uitkomst groter). Natuurkundig gezien is dat ook logisch, omdat het verplaatste water over een kleinere oppervlakte verdeeld wordt.

Kortom: of de boot nu groot of klein is, zwaar of licht. De waterspiegel stijgt met meest in het geval van afbeelding C.

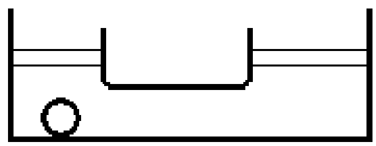
Geval 2
In de wetenschapsquiz van 1994 komt een variant van dit probleem voor.

> **Je zit in een roeiboot in een vijver met een zware steen in de boot. Wat gebeurt er met het waterpeil van de vijver als je die steen overboord zet?**
>
> a. Het waterpeil stijgt.
> b. Het waterpeil daalt.
> c. Het waterpeil blijft gelijk.

De roeiboot met de steen er in is dezelfde situatie als in afbeelding C.
Als de steen overboord gegooid is, ontstaat de situatie die in afbeelding D getekend is.



C



D

De stijging van de waterspiegel in situatie C hebben we al bekeken.

In situatie D wordt de verplaatsing veroorzaakt door de steen plus die van de boot. Dat werken we nu verder uit.

De waterverplaatsing door de steen is het volume van de steen V. Omdat we zo meteen ook te maken krijgen met het watervolume dat de boot verplaatst, schijf we het volume van de steen nu als V_{steen} .

De zwaartekracht op de boot is:

$$F_z = m_{boot} g \qquad (5)$$

De opwaartse kracht van het water op de boot is gelijk aan de zwaartekracht van het verplaatste water.

$$F_{opwaarts} = m_{water} g = \rho_{water} V_{water} g \qquad (6)$$

Deze twee krachten zijn even groot:

$$F_{opwaarts} = F_Z$$

dus:

$$\begin{aligned} \rho_{water} V_{water} g &= m_{boot} g \\ \rho_{water} V_{water} &= m_{boot} \\ V_{water} &= \frac{m_{boot}}{\rho_{water}} \end{aligned} \qquad (7)$$

In deze formule slaat V_{water} nu alleen op het volume van het water dat door de boot verplaatst wordt.
De vraag is nu weer of het volume van het verplaatste water (in beide gevallen t.o.v. van situatie A) in geval C, of in geval D groter is.

Dus:

$$\frac{(m_{boot} + m_{steen})}{\rho_{water}} \underset{?}{>} V_{steen} + V_{water}$$

We vullen voor V_{steen} de dichtheidformule en voor V_{water} de eerder gevonden formule in:

$$\frac{(m_{boot} + m_{steen})}{\rho_{water}} \underset{?}{>} \frac{m_{steen}}{\rho_{steen}} + \frac{m_{boot}}{\rho_{water}}$$

Daarna schrijven we de formule links van het groter-dan-teken als de som van twee breuken

$$\frac{m_{boot}}{\rho_{water}} + \frac{m_{steen}}{\rho_{water}} \underset{?}{>} \frac{m_{steen}}{\rho_{steen}} + \frac{m_{boot}}{\rho_{water}}$$

Tenslotte halen we van beide zijden $\frac{m_{boot}}{\rho_{water}}$ af:

$$\frac{m_{steen}}{\rho_{water}} \underset{?}{>} \frac{m_{steen}}{\rho_{steen}}$$

Ook hier vergelijken we weer twee breuken met dezelfde teller. Omdat de steen in water zinkt heeft deze een grotere dichtheid dan water en dus delen we rechts door een groter getal. De waterverplaatsing in geval C is dus groter dan in geval D.

Kortom: als we de steen uit de boot gooien, zal het waterpeil dalen. Antwoord b is het juiste antwoord.